УДК 519.61

ПОВЫШЕНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ НОРМАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В СИСТЕМАХ НАВИГАЦИИ

IMPROVING THE STABILITY OF THE NORMAL EQUATIONS SOLUTION IN NAVIGATION SYSTEMS

© Лутай В. Н.
Южный федеральный университет
г. Таганрог, Россия, vnlutay@sfedu.ru
©Lutay V.
Southern Federal University,
Taganrog. Russia, vnlutay@sfedu.ru
©Пирская Л. В.
Южный федеральный университет
г. Таганрог, Россия, lpirskaya@sfedu.ru
©Pirskaya L.
Southern Federal University,
Taganrog. Russia, lpirskaya@sfedu.ru

Аннотация. Рассматривается решение системы нормальных уравнений, используемых в навигационных определениях, методом квадратных корней. Предлагается способ повышения устойчивости вычислительного процесса, заключающийся в отсечении младших разрядов произведения двух чисел при вычислении диагональных коэффициентов треугольной матрицы. Приведены результаты вычислительных экспериментов для матрицы Гильберта восьмого порядка.

Absrtract. Discusses the solution of the system of normal equations used in navigation definitions, method of square roots. A method of increasing the stability of the computational process, consisting in cutting off the least significant bits of the product of two numbers when evaluating the diagonal coefficients of the triangular matrix. The results of computational experiments for the Hilbert matrix of order eight.

Ключевые слова: системы нормальных уравнений, неполное треугольное разложение, расщепление матрицы, усечение результатов арифметических операций.

Keywords: the system of normal equations, incomplete triangular decomposition, splitting of a matrix, truncation of the results of arithmetic operations.

Нормальные системы линейных алгебраических уравнений вида

$$Ax = b \tag{1}$$

порядок которых не превышает 8, достаточно широко используются при решении навигационных задач [1]. Матрица системы плотная, симметричная и положительно определенная; ее норма невелика (не больше n); матрица может быть плохо обусловленной. Для решения нормальных систем (1) используются как прямые, так и итерационные методы решения.

Улучшение решения СЛАУ может быть достигнуто предобусловливанием матрицы A. В процессе предобусловливания формируется матрица M такая, что при решении системы с матрицей $M^{-1}A$ (левое предобусловливание) или с AM^{-1} (правое), вектор x становится ближе к истинному решению в прямых алгоритмах или быстрее приближается к нему в итерационных. Матрица M может быть сформированной в процессе неполного разложения (факторизации) матрицы A. В результате последней A становится расщепленной матрицей

$$A = M - N \tag{2}$$

где N – матрица ошибок неполного разложения [4].

В основу исследований, выполненных в данной работе, положено решение методом квадратных корней (метод Холецкого), в процессе которого формируется треугольная матрица такая, что

$$A = L_A {L_A}^T,$$

где L_A - нижняя треугольная матрица, ${L_A}^T$ – матрица, транспонированная к ней.

Схема вычисления элементов треугольной матрицы [3] приведена ниже.

$$l_{11} = {a_{11}}^{1/2}, \qquad l_{j1} = a_{j1}/l_{11}, \ j > i,$$
$$l_{ii} = \left(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2\right)^{1/2}, \ i > 1, \tag{3}$$
$$l_{ji} = \left(a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} l_{kj}\right) \Big/ l_{ii}, \ \ j > i.$$

После получения элементов матрицы L_A решаются две системы с треугольными матрицами

$$L_A z = b, L_A^T z = x \tag{4}$$

Количество операций при решении (4) оценивается как $2n^2$.

Теоретически при положительно определенной матрице A подкоренное выражение в (4) должно быть неотрицательным. Однако при большом числе обусловленности матрицы результат этого выражения может стать отрицательным, вследствие чего происходит срыв вычислительного процесса [2].

Для предотвращения этого явления предлагается увеличить подкоренное выражение в (3) посредством отсечения младших разрядов квадратов чисел.

Формально операцию отсечения определим следующим образом [6]. Положим, что результат выражения xy, где x, y числа с плавающей точкой, имеет некоторое количество значащих цифр p при количестве разрядов мантиссы, равном t. Введем целое положительное число τ такое, что $0 \le \tau \le t$. Обозначим $fl_\tau(xy)$ результат этого выражения, в котором отсечены τ младших десятичных разрядов. Тогда

$$fl_\tau(xy) = xy \ \text{ при } p \le t - \tau \ \text{ и } \ |fl_\tau(xy)| < |xy| \ \text{ при } p > t - \tau,$$
$$p = 1,2, \dots, t$$

и выражение для вычисления i-го диагонального элемента с отсечением примет следующий вид:

$$l_{ii} = \left(a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} fl_\tau(l_{ik}^2)\right)^{1/2}.$$

Так как все диагональные члены исходной матрицы a_{ii} положительны, то значения l_{ii} при количестве значащих цифр, превышающим значение τ, увеличиваются.

Отсечение реализуется программным путем; по сложности ее можно сравнить с операцией умножения и сложения чисел удвоенной точности при реализации режима накопления. Но действует она ровно наоборот, не увеличивая, а уменьшая разрядность произведения. Необходимое для нее условие превышения количества значащих разрядов значения $p > \tau$ выполняется естественным образом при выполнении операций возведения в квадрат числа со значащими десятичными разрядами.

Введение дополнительной операции, не предусмотренной стандартной схемой (3), приводит к тому, что разложение Холецкого оказывается неполным и в (2), записанном как

$$M = LL^T = A + N,$$

выражения для членов матриц M и N выглядят следующим образом

$$m_{ij} = a_{ij}, \qquad i \neq j$$

$$n_{ii} = \sum_{k=1}^{i-1} ({l_{ik}}^2 - fl_\tau({l_{ik}}^2)),$$

$$m_{ii} = a_{ii} + n_{ii}, \qquad i > 1.$$

Матрица M так же, как и матрица A, симметричная и положительно определенная; ее норма практически совпадает с нормой A. Матрица N диагональная с нулевым первым диагональным членом. Значения n_{ii} увеличиваются с увеличением количества отсеченных разрядов. При $\tau = 0$ все $n_{ii} = 0$, а M, L совпадают с матрицами A, L_A. Значения n_{ii} можно получить после окончания неполного разложения вычитанием из M матрицы A, но можно формировать ее в процессе вычислений в дополнительном векторе.

Отсечения можно выполнять для всех диагональных членов, начиная со второго, а можно только для нескольких.

Решение СЛАУ с матрицей M

$$M\tilde{x} = b,$$

дает приближенное решение системы (1). Степень приближения к точному решению зависит от количества отсекаемых разрядов: чем меньше τ, тем больше невязка решения и наоборот.

Нетрудно показать, что точное решение можно получить из следующего выражения:

$$x = (I - M^{-1}N)^{-1}M^{-1}b, \qquad (5)$$

где I - единичная матрица.

Из сравнения (5) и выражения $x = A^{-1}b$ следует, что

$$A^{-1} = (I - M^{-1}N)^{-1}M^{-1}, \qquad (6)$$

т.е. обратная матрица системы (2) является произведением двух матриц.

Вычислительные эксперименты, результаты которых приведены ниже, выполнялись с известной матрицей Гильберта, которая является симметричной, положительно определенной и очень плохо обусловленной, причем число обусловленности резко возрастает при увеличении n [5].

Вычисления проводились без режима накопления в формате double с 17-ю разрядной мантиссой. Результаты экспериментов со срывом вычислительного процесса для $n = 8$ и различного количества десятичных разрядов в представлении элементов A и b из (1), приведены в первых трех столбцах Таблицы. В ней отмечены индексы диагональных членов, вычисление которых срывается из-за отрицательного подкоренного выражения.

Предотвращение аварийного останова вычислений можно добиться увеличением точности представления матрицы и свободных членов. Действительно, срыв вычислений прекращается при увеличении точности (в данном случае увеличения числа разрядов) представления чисел для n=8 больше 8. Однако, вследствие специфики формирования (1) в системах навигации: использование аналого-цифрового преобразования данных, умножения на значения вероятностей, весовые коэффициенты, направляющие косинусы [1] – сделать это не всегда предоставляется возможным.

Рассмотрим срыв для n=8 подробно. В момент прекращения вычислений значения l_{88} подкоренное выражение меньше 0. Формула для вычисления этого элемента следующая:

$$l_{88}^2 = a_{88} - \sum_{j=1}^{i-1} l_{8j}^2.$$

Согласно схеме (3) последним до суммирования определяется l_{87}

$$l_{87} = \left(a_{87} - \sum_{j=1}^{i-2} l_{8j} l_{6j}\right) \Big/ l_{77}.$$

Для уменьшения l_{87} увеличим l_{77} применив при его вычислении отсечение. Вычислительный процесс завершается нормально, если $\tau \geq 13$. При этом в матрице N появляется единственный ненулевой элемент n_{77}, из чего следует, что величина погрешности, внесенной неточным представлением исходной матрицы и погрешностью округления, которая накопилась к моменту вычисления l_{77}, не превышает n_{77}. (Более точно погрешность можно оценить, если при отсечении оперировать не десятичными, а двоичными разрядами).

Таблица.

СРЫВ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА
В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ЧИСЛА РАЗРЯДОВ a_{ij}, b_i

Порядок системы	Количество разрядов представления a_{ij}, b_i	Сорванный элемент	Значение τ	Величина $n_{i-1,i-1}$
8	5	l_{66}	14	5.78e-5
8	8	l_{88}	13	2.26e-5

Оценим количество вычислительных операций для получения точного решения системы (1) в соответствии с (5), для чего перепишем его следующим образом:

$$x = (I - M^{-1}N)^{-1}\hat{x},$$

Для получения приближенного решения $\hat{x}$ необходимо выполнить такое же количество операций, как и в стандартном методе Холецкого: $n^3/3 + 2n^2$. Матрица $M^{-1}N$ имеет столько ненулевых столбцов, сколько имеется ненулевых членов в матрице N, при этом индекс диагонального члена с отсечением соответствуют номеру ненулевого столбца в $M^{-1}N$. Так как треугольное разложение уже выполнено, то один столбец вычисляется согласно (4) за $2n^2$ операций. Матрица $I - M^{-1}N$ в этом случае кроме n-1 единиц на главной диагонали имеет один плотный столбец. Ее обращение сводится к n операциям деления элементов этого столбца на элемент, находящийся на главной диагонали. Умножение такой матрицы на вектор $\hat{x}$ реализуется за n операций сложения и умножения. Таким образом, количество дополнительных операций для вычисления точного устойчивого решения при однократном отсечении можно оценить как $2n^2 + O(n)$. Увеличение числа отсечений приводит к возрастанию количества операций как для вычисления матрицы $M^{-1}N$, так и для обращения матрицы $I - M^{-1}N$. В частности, для случая, который определен в первой строке таблицы 1, необходимо выполнять отсечения для l_{55}, l_{66}, l_{77}.

Приведенные результаты экспериментов показывают, что предложенный метод увеличения значений диагональных членов треугольного разложения может служить эффективным средством повышения устойчивости вычислительного процесса при решении систем нормальных уравнений.

Работа выполнена в рамках базовой части государственного задания в сфере научной деятельности (проект № 3442 «Информационно-алгоритмическое обеспечение систем цифрового управления, автономной высокоточной навигации и технического зрения для перспективных летательных аппаратов: разработка теоретических основ проектирования, алгоритмов, способов эффективной и надежной программной реализации, использование высокопроизводительной вычислительной инфраструктуры для экспериментального моделирования»).

Список литературы:

1. Шебшаевич В. С., Дмитриев П. П., Иванцевич Н. В. и др. Сетевые спутниковые радионавигационные системы / Под ред. В. С. Шебшаевича. 2-е изд. перераб. и доп. М.: Радио и связь, 1993. 408 с.
2. Голуб Дж., Ван Лоун Ч. Матричные вычисления: Пер. с англ. М.: Мир, 1999. 548 с.
3. Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А. Матрицы и вычисления. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984. 320 с.
4. Ильин В. П. Методы неполной факторизации для решения алгебраических систем. М.: Физматлит, 1995.
5. Майстренко А. В., Светлаков А. А., Черепанов Р. О. Исследование свойств матрицы Гильберта и причин ее плохой обусловленности // Омский научный вестник. 2011. №3 (103). С. 265–269.
6. Лутай В. Н. Приближенное решение систем линейных алгебраических уравнений с плохо обусловленной матрицей коэффициентов // Евразийский союз ученых. 2015. №10–6 (19). С. 38–41.

References:

1. Shebshaevich V. S., Dmitriev P. P., Ivantsevich N. V. i dr. Setevye sputnikovye radionavigatsionnye sistemy / Pod red. V. S. Shebshaevicha. 2-e izd. pererab. i dop. M.: Radio i svyaz, 1993. 408 p.
2. Golub Dzh., Van Loun Ch. Matrichnye vychisleniya: Per. s angl. M.: Mir, 1999. 548 p.
3. Voevodin V. V., Kuznetsov Yu. A. Matritsy i vychisleniya. M.: Nauka. Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoi literatury, 1984. 320 p.
4. Ilin V. P. Metody nepolnoi faktorizatsii dlya resheniya algebraicheskikh sistem. M.: Fizmatlit, 1995.

5. Maistrenko A. V., Svetlakov A. A., Cherepanov R. O. Issledovanie svoistv matritsy Gilberta i prichin ee plokhoi obuslovlennosti. Omskii nauchnyi vestnik. 2011, no. 3 (103), pp. 265–269.

6. Lutai V. N. Priblizhennoe reshenie sistem lineinykh algebraicheskikh uravnenii s plokho obuslovlennoi matritsei koeffitsientov. Evraziiskii soyuz uchenykh, 2015, no. 10–6 (19), pp. 38–41.